Institut La Centrale — Electrostatique (Exercices proposés) — outils maths

ETUDUP .com

Exercice 1

On considère un repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un point M

1/ Coordonnées polaires $M(r, \theta)$

Soit $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ la base locale lié à M

Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans les bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM}$ dans les 2 bases

En déduire la surface élémentaire dS

2/ Coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$

Soit $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ la base locale lié à M

Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans les 2 bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM}$ dans les 2 bases

En déduire les surfaces élémentaires dS_r, dS_θ, dS_z et le volume élémentaire dV

3/ Coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$

Soit $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ la base locale lié à M

Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans les 2 bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM}$ dans les 2 bases

En déduire les surfaces élémentaires dS_x, dS_y, dS_z et le volume élémentaire dV

Exercice 2

1/ Calculer le gradient des fonctions scalaires suivantes :

$\Phi_1(x,y,z) = r$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Phi_2(x,y,z) = \frac{1}{r}$ $\Phi_3(x,y,z) = f(r)$

2/ Calculer la divergence et le rotationnel des fonctions vectorielles suivantes

$\vec{V_1} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{V_2} = g(r).\vec{r}$

Exercice 3

Calculer la divergence et le rotationnel des champs suivants

a/ $\vec{V_1}(M) = (2x-y)\vec{i} + (2x-y)\vec{j} - 4z\vec{k}$ b/ $\vec{V_2}(M) = e^{x+y}\vec{i} + e^{x+y}\vec{j} + e^{z}.\vec{k}$

Exercice 4 Soit le champ de vecteurs

$$\vec{V}(M) = \frac{3x^4+2x^2y^2-y^4}{x^2y}\vec{i} + \frac{3y^4+2x^2y^2-x^4}{y^2x}\vec{j}$$

1/ Montrer que ce champ dérive d'un potentiel scalaire

Calculer la fonction potentiel $U(x,y)$ dont il dérive.

* $\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

C.S : $\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$

2/ Donner l'equation des equipotentielles

Exercice 5

1/ Rappeler les expressions du vecteur deplacement elementaire dans les differents systemes de coordonnées (cartesiennes, polaires, cylindriques et spheriques)

2/ En utilisant ses expressions, deduire :

le perimetre d'un cercle de rayon R, la surface d'un disque de rayon I

la surface laterale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h

la surface d'une demi-sphere de rayon R, le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h

Exercice 6

On considere un repere orthonormé $R(O,x,y,z)$ et soit le champ de vecteurs $\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{e_r}$ defini en tout point M tel que:

$r = OM$ $\vec{e_r} = \frac{\vec{r}}{r}$, $k = Cst$

1/ Calculer $\operatorname{div}\vec{E}$ et $\vec{rot}\,\vec{E}$

2/ Montrer que le champ de vecteurs $\vec{E}$ derive d'un potentiel scalaire $V(r)$ que l'on determinera

3/ Donner l'equation de surface de niveau (equipotentielle) relative à $V(r)$

4/ Calculer le flux de $\vec{E}$ sortant à travers une sphere de rayon R et de centre O.

Exercice 7 On considere le champ vectoriel $\vec{E} = yz\,\vec{i} + zx\,\vec{j} + [illegible]\,\vec{k}$

1/ $\vec{E}$ étant un champ de gradient, determiner la fonction scalaire ϕ dont il dérive.

2/ Determiner la circulation de $\vec{E}$ entre les points (0,0,0) et (1,1,1)

Exercice 8 On considere le champ $\vec{E}$ defini par ses composantes en coodonnées polaires : $E_r = \frac{2k\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = \frac{k\sin\theta}{r^2}$

1/ Trouver l'equation des lignes de champ

2/ Montrer que ce champ peut sous mettre sous la forme $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$

3/ Determiner le potentiel V sachant que V tend vers 0 à l'infi

Exercice 9 le flux du champ vectoriel $\vec{E} = \frac{k}{r}\vec{i}$ sortant à travers une surface cylindrique d'axe Oz, de rayon et de hauteur h

r étant la distance orthogonale par rapport à l'axe Oz et $k = Cst$

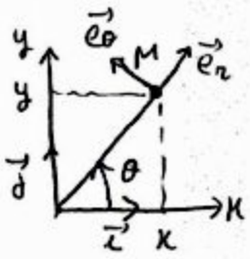
Calculer ce flux dans le cas où le champ $\vec{E}$ est radial ($\vec{E} = \frac{k}{r}\vec{e_r}$)

ETUDUP .com

Exercice 1

1/ Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta})$: $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e_r}$



On $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ d'où $\overrightarrow{OM} = (r\cos\theta)\vec{i} + (r\sin\theta)\vec{j}$

par identification : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

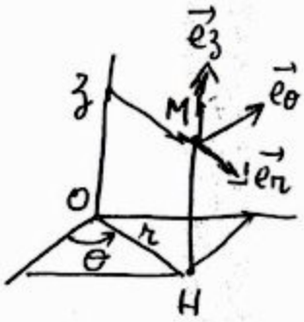
Dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta})$ $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = d(r\vec{e_r}) = dr\,\vec{e_r} + r.d\vec{e_r}$

Comme $\dfrac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta}$ alors : $d\vec{\ell} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta.\vec{e_\theta}$

$dS = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

2/ Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{k}$



On $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ d'où $\overrightarrow{OM} = (r\cos\theta)\vec{i} + (r\sin\theta)\vec{j} + z\vec{k}$

et on obtient $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

Dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$: $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{k}$

le volume elementaire : $dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$

les surfaces elementaires :

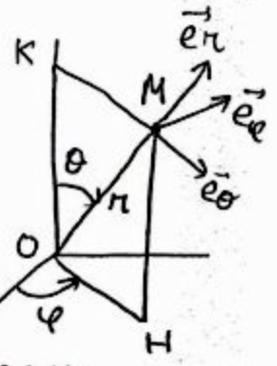
$x = cst$: $dS_x = dy\,dz$; $dS_x \perp \vec{i}$ $\quad r = cst$: $dS_r = r\,d\theta\,dz$; $dS_r \perp \vec{e_r}$

$y = cst$: $dS_y = dx\,dz$; $dS_y \perp \vec{j}$ $\quad \theta = cst$ $dS_\theta = dr\,dz$ $dS_\theta \perp \vec{e_\theta}$

$z = cst$: $dS_z = dx\,dy$; $dS_z \perp \vec{k}$ $\quad z = cst$ $dS_z = r\,dr\,d\theta$ $dS_z \perp \vec{e_z}$

3/ Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (1)

Dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi})$: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$



De plus $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = OH\cos\varphi\,\vec{i} + OH\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k}$

On $OH = MK = r\sin\theta$ et $z = r\cos\theta$ d'où

$\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$ (2)

Par identification des relations (1) et (2) on obtient : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

ETUDUP .com

Expressions des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On a $\overrightarrow{OH} = r\vec{e}_r$ et de la relation (2) on obtient :

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \left.\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right|_{\varphi=cst} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

Comme la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est directe alors $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$: $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = d(r\vec{e}_r) = dr\,\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r$

or $d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\varphi}d\varphi = (\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k})\,d\theta + (-\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j})\,d\varphi$

$= \vec{e}_\theta\,d\theta + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi\,d\varphi$

donc $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

- Volume élémentaire : $dV = dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Les 3 surfaces élémentaires :

$x = cst$	$dS_x = dy\,dy$; $dS_x \perp \vec{i}$	$r = cst$	$dS_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$; $dS_r \perp \vec{e}_r$
$y = cst$	$dS_y = dx\,dz$; $dS_y \perp \vec{j}$	$\theta = cst$	$dS_\theta = r\sin\theta\,dr\,d\varphi$; $dS_\theta \perp \vec{e}_\theta$
$z = cst$	$dS_z = dx\,dy$; $dS_z \perp \vec{k}$	$\varphi = cst$	$dS_\varphi = r^2\,dr\,d\theta$; $dS_\varphi \perp \vec{e}_\varphi$

Exercice 2

1/ $\phi_1(x,y,z) = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \text{grad}\,\phi_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi_1}{\partial z}\vec{k} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}$

$\phi_2(x,y,z) = \frac{1}{r}$, $\text{grad}\,\phi_2 = \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi_2}{\partial z}\vec{k} = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k}$

$\phi_3(x,y,z) = f(r)$; $\text{grad}\,\phi_3 = \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi_3}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi_3}{\partial z}\vec{k}$

$= \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right)$

2/ $\vec{V}_1 = \frac{1}{r^3}\vec{r}$; $V_r = \frac{1}{r^3}$; $V_\theta = 0$; $V_\varphi = 0$

$\text{div}\,\vec{V}_1 = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^4}$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{V}_1 = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi = \vec{0}$

$\vec{V}_2 = g(r)\vec{r}$; $V_r = g(r)$; $V_\theta = 0$; $V_\varphi = 0$

$\text{div}\,\vec{V}_2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 g(r))}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left(2r\,g(r) + r^2\,g'(r)\right) = \frac{1}{r}\left(2\,g(r) + r\,g'(r)\right)$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{V}_2 = \vec{0}$

ETUDUP .com

Exercice 3

$\vec{V_1}(M) = (2x-y)\vec{i} + (2x-y)\vec{j} - 4z\vec{k}$ $\quad \vec{V_2}(M) = e^{x+y}\vec{i} + e^{x+y}\vec{j} + e^3.\vec{k}$

$\operatorname{div}\vec{V_1} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 2 - 1 - 4 = -3$

$\operatorname{rot}\vec{V_1} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (2+1)\vec{k} = 3\vec{k}$

$\operatorname{div}\vec{V_2} = e^{x+y} + e^{x+y} + e^3 = 2e^{x+y} + e^3$

$\operatorname{rot}\vec{V_2} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (e^{x+y} - e^{x+y})\vec{k} = \vec{0}$

Exercice 4 On pose $X = \frac{3x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{x^2 y} = 3\frac{x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2}$; $Y = \frac{3y^4 + 2x^2y^2 - x^4}{y^2 x} = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}$

Alors $\vec{V}(M) = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si elle existe une fonction scalaire $U(x,y)$ telque

$\vec{V}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, U(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\vec{j}$

càd $dU(x,y) = X\,dx + Y\,dy$

Propriété : Si $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ alors $\vec{V}$ dérive d'un potentiel

1/ on a $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^2} + 2 - \frac{3y^2}{x^2}$ et $\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^2} + 2 - \frac{3x^2}{y^2}$

Comme $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ alors $\vec{V}$ dérive d'un potentiel U

• Déterminons U telque : $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = X = \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2} & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Y = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow U(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + g(y)$

(2) : $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x} + g'(y) = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$

d'où $U(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + C$

2/ Equations des equipotentielles

$U(x,y) = \text{Cst} = k \iff \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + C = k$

$\iff x^3 + y^3 + 2x^2y^2 - Kxy = 0$

Exercice 5 1/ $d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$; $d\vec{\ell} = dr\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$d\vec{\ell} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$; $d\vec{\ell} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi.\vec{e_\varphi}$

• Le périmètre d'un cercle de rayon R : $R = \int_C d\ell = \int_C R\,d\theta = \int_0^{2\pi} R\,d\theta = R.[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi R$

ETUDUP .com

• la surface d'un disque de rayon R :

$$S = \iint_D dS = \iint_D r\,dr\,d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r\,d\theta \right) dr = \int_0^R [r\theta]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^R r\,dr = \pi$$

• Surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h

$$S = \iint_C dS_r = \iint_C R\,d\theta\,dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} R\,d\theta\,dz = \int_0^h dz \cdot \int_0^{2\pi} R\,d\theta = [z]_0^h \cdot [R\theta]_0^{2\pi} = 2\pi R.h$$

• la surface d'une demi-sphère de rayon R

$$S = \iint_C dS_r = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} R^2 \sin\theta\,.\,d\theta\,d\varphi = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\pi} d\varphi = R^2 \times 2 \times \pi = 2\pi R^2$$

• le volume d'un cylindre de Rayon R et de hauteur h

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{r=0}^{R} \left(\int_{z=0}^{h} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,d\theta \right) dz \right) dr = \int_0^R r\,dr \cdot \int_0^h dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot h \cdot 2\pi = \pi$$

Exercice 6 1/ $\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{e_r}$ $\quad \vec{e_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ $\quad r = OM$ $\quad k = Cst$

On a $E_r = \frac{k}{r^2}$; $E_\theta = 0$; $E_\varphi = 0$

Alors $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (k) = 0$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (E_r)\,\vec{e_\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_r)\,\vec{e_\varphi} = \vec{0}$$

2/ Comme $\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ alors $\vec{E}$ derive d'un potentiel scalaire $V(r)$

càd $\vec{E} = \vec{grad}\,V$

d'où $E_r = \frac{\partial V}{\partial r}$; $E_\theta = \frac{1}{r \sin\varphi} \frac{\partial V}{\partial \theta}$; $E_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}$

et $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k}{r^2}$; $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ $\Rightarrow V = V(r) = -\frac{k}{r} + C$

3/ l'equation des surfaces de niveau :

$V = K = \text{Constante}$; $-\frac{k}{r} + C = K \Rightarrow r = R$ constante

4/ $\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_S E(r)\,dS = E(r) \oiint_S dS = E(r) \cdot (4\pi R^2) = 4\pi R^2 \cdot \frac{k}{r^2}$

Exercice 7 1/ Determinons ϕ telque : $\vec{E} = \operatorname{grad} \phi$ càd telque :

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = yz$ (1) $\quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = zx$ (2) $\quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = xy$ (3)

(1) $\Rightarrow \phi(x,y,z) = xyz + g(y,z)$ $\quad$ (2) $\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = xz + g'_y = xz \Rightarrow g(y,z) = h(z)$

d'où $\phi(x,y,z) = xyz + h(z)$ $\quad$ (3) $\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + h'(z) = xy \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) =$

d'où $\phi(x,y,z) = xyz + C$

2/ $\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_C yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz = \int_C d\phi = [\phi(x,y,z)]_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} = \phi(1,1,1) - (0,0,0) = 1$

ETUSUP .com

et encore plus..